

LBRIS

We know
books

PARADOXURI ȘI AXIOME

Fundamente ale matematicii

NELO MAESTRE BLANCO

LITERA
București

CUPRINS

Capitolul 0

Și s-a născut axioma...	7
Căutând lumina de la capătul tunelului	8
Alexandria, anul 300 î.Hr., acasă la Euclid	11
<i>Hypatia din Alexandria</i>	12
<i>Ce înseamnă științe matematice?</i>	14
A postula pentru a învinge	16
Definiții	17
Cele cinci postulate ale lui Euclid	18
Un prinț curajos, și nu prea	22

Capitolul 1

Mecanicizarea gândirii	27
Ideea unei gândiri automate	29
<i>Turcul șahist</i>	31
Începe partida, primele mișcări ale pionilor	34
Se inventează un sistem de notare a mișcărilor	37
<i>Diagrame utile în evaluarea propozițiilor</i>	46
Ce mulțime de piese poate elimina altă piesă?	50
Și brusc, soarta partidei se răstoarnă	55

Capitolul 2

Să joci împotriva jocului și să pierzi	59
Sfârșitul dimineților fericite și promițătoare	60
Paris, 8 august 1900	66
Importanța rigorii	70
Partida continuă	74

Capitolul 3

Să demonstrezi că nu se poate demonstra	85
Domnul De ce?	86
<i>Matematica arcelor</i>	88
Numere care vorbesc despre lucruri	93
Enunțuri demonstrabile	97
Intră în joc variabilele	101
Gödel după incompletitudine	106
Când culorile obnubilează realitatea	108

Capitolul 4

Și acum?	111
Chestiunea infinitului	111
Fundamentele matematicii	114
Și ce-ați spune despre automatizarea gândirii?	116
<i>Programarea are un nume feminin</i>	120
<i>Jocul de Go</i>	126
Va rămâne mereu Parisul	127

Anexă	131
--------------	-----

Bibliografie recomandată	141
---------------------------------	-----

Și s-a născut axioma...

Uleiul din lampă era pe sfârșite; poate că venise momentul să încheie lucrul în acea zi. Lucrarea pe care și-o imaginase de atâtea ori prin-dea contur. Visul lui, marele compendiu al cunoașterii matematice din toate timpurile, căpăta tot mai multă formă și substanță pe zi ce trecea. Cât de mândri ar fi fost Thales, Pitagora, Platon, Eudoxus, Theaetetos să vadă, în sfârșit, adunate într-o singură lucrare toate cunoștințele, metodele de construire a figurilor, a teoremelor ...

Și totuși, lipsea ceva. Tratatul ale cărui dimensiuni îi întrecuseră așteptările avea nevoie de câteva premise care să fie la înălțimea restului operei. În sfârșit, rațiunea reușea să se impună în fața superstiției. În sfârșit, cunoașterea, logica și argumentația aveau să servească pentru a pune capăt obiceiului de a explica totul printr-un fel de ciudată magie sau prin intervenție divină.

Cum să înceapă minunata călătorie pe tărâmul cunoașterii acumulate în atâtea secole? Drept să spun, în lucrarea respectivă nu era totul definit, lipseau chiar părțile fundamentale ale elementelor descrise, acele părți atât de mici încât cu greu puteau fi demonstrate. Lipsea ceva de domeniul evidenței... Poate că era pe cale să omită tocmai evidența. Era imperios necesar să definească infinitezimalul, punctul. La fel de necesar era să definească dreapta, cercul

și unghiul drept. Toate unitățile deveneau demonstrabile prin ele însele, constituiau adevăruri evidente; *aitémata* părea cel mai potrivit nume pentru aceste concepte. Postulatul, fundamentul, baza pe care să construiască întreaga matematică.

Flacăra din lampă se stinse. În timpul nopții se va gândi la acea idee și a doua zi poate o va introduce în *Elemente*.

Căutând lumina de la capătul tunelului

Mai întâi, îmi cer scuze cititorilor pentru scurtul moment de reverie din rândurile anterioare. Îmi place să mi-i imaginez pe marii oameni de știință ai Antichității în acele momente unice în care, conștienți sau nu, erau pe cale să schimbe destinul istoriei; momente în care fiecare adăuga propria cărămidă la marele edificiu al științei, care era asemenea unei catedrale cu vitralii. Am crezut întotdeauna că matematica este o disciplină care se studiază și se învață fără a le acorda atenție celor care au edificat-o. Sper să nu se întâmple acest lucru în cursul acestor pagini, în care vom face cunoștință cu personaje ilustre.

Filosofii au căutat mult timp să înțeleagă esența tuturor cunoștințelor umane. Și noi, matematicienii, care deseori ne ocupăm de chestiuni aproape filosofice, a trebuit să ne punem întrebarea: ce este matematica? Sau mai corect: ce nu este matematica? Și prin ce este diferită de celelalte științe?

Deși la școală am repetat operații și procese aritmetice până la saturație, acestea reprezintă doar instrumentele matematicianului, deoarece obiectivele pe care le urmărește trec dincolo de utilizarea cu dezinvoltură a acestor *accesorii*. E ca și cum am spune că Velázquez și Picasso erau foarte pricepuți să mânuiască pensula în loc să descriem operele *Las Meninas* sau *Guernica*. Matematica este disciplina care se ocupă de procedeele corecte de gândire; în opinia multora, este arta de a gândi riguros. Ea urmărește să găsească un mod de a observa lumea, abstractă sau reală, ce ne înconjoară, cu scopul de a descoperi

modele, regularitate. Științele matematice își propun să găsească ordinea ascunsă a tot ce ne înconjoară ca să putem controla haosul și, într-un fel sau altul, să gestionăm incertitudinea.

Dar dacă dorim să fim siguri că rigoarea este cheia științei noastre, este nevoie să definim și părțile mai mici. Noțiuni bine-cunoscute precum „punctul”, „dreapta”, „unghiul” sau „cercul” au fost întrebuințate înainte de a fi primit o definiție precisă, prin urmare, deși pare o contradicție, este foarte dificil să definim în mod riguros ceva ce este cunoscut tuturor. Ca să nu mai vorbim despre definiția concretă a noțiunilor de „argument”, „definiție”, „demonstrație” sau „contradicție”.

Însă, în urmă cu un secol și ceva, matematicienii care puseseră deja temelii solide ale disciplinei lor, au primit o lovitură năprasnică atunci când au descoperit că unele dintre ele ar fi putut fi greșite. Secole la rând, s-au mulțumit să clădească peste moștenirea rămasă de la înaintași, fără să se întrebe dacă bazele erau cu adevărat solide. Spre sfârșitul sec. al XIX-lea, această situație a declanșat ceea ce mai târziu a luat numele de „criza fundamentelor”.

În timpul acestei crize, s-au reluat întrebări importante, lăsate fără răspuns timp de secole, fie din lipsa unor instrumente adecvate pentru a răspunde, fie din teama de a aborda întrebările.

Dintre toate întrebările, ne vom ocupa de trei – cele mai importante formulate de-a lungul timpului:

1. Ce anume definește și caracterizează cu adevărat matematica: axiomele, logica, procesele demonstrative?
2. Este posibil să se creeze științe matematice riguroase, care s-au eliberat de limbajul ambiguu, pentru a dezvolta raționamente în mod automat, mecanic sau algoritmic?
3. Cum putem aborda ideea de infinit?

Înțeleg că la prima vedere cele trei întrebări nu au legătură între ele. Cu toate acestea, în paginile ce urmează veți putea înțelege

că răspunsurile la aceste întrebări se întrepătrund, chiar sunt interdependente și formează un soi de mic sistem de trei entități, în care fiecare schimbare – ce o afectează pe una din cele trei – duce la destabilizarea sistemului. Prin urmare, vom găsi o soluție care să ne ajute să înțelegem raportul existent între cele trei, sau, dimpotrivă, îi vom da dreptate lui Henri Poincaré, și vom presupune că cele trei răspunsuri formează un ansamblu ce tinde spre haos?

Vom încerca să pornim pe drumul parcurs deja de știința matematicii, însoțiți de călăuze celebre, pentru a descoperi dacă știința și rațiunea au reușit să iasă victorioase în bătălia cu mitul, îndoiala și superstiția. Vom căuta să explicăm concepte folosite zilnic de un matematician, dar nu adunări, înmulțiri sau funcții integrale complicate, ci axiome, procese logice și demonstrații. Călătoria și-a avut începutul cu mult timp în urmă, în jurul anului 325 î.Hr., când un bărbat își așternea ideile în scris, la flacăra unei lămpi cu ulei.

§

Lucrarea în cauză, *Elementele*, este cu siguranță cel mai important compendiu de matematică al tuturor timpurilor, și în el sunt explicate principalele noțiuni de bază din acest domeniu. Conține cea mai mare parte a cunoștințelor care se învață astăzi în școala elementară și parțial, la gimnaziu.

Se crede că *Elementele* au fost traduse pentru prima dată în latină spre sfârșitul sec. al XII-lea. Se pare că prima traducere îi aparține lui **Adelard din Bath** (circa 1080-1150), cunoscut traducător din Evul Mediu, care probabil a redactat lucrarea folosind o ediție arabă. Se crede că era o carte destul de cunoscută; de altfel, astăzi există peste cincizeci de exemplare din acea epocă, care au rezistat trecerii timpului. Unii cercetători susțin că apariția acestei cărți în latină a luminat drumul arhitecților medievali, i-a ajutat să depășească obscuritatea construcțiilor romanice și i-a propulsat către frumusețea geometrică și luminozitatea construcțiilor gotice.

Probabil au existat numeroase contribuții arabe la tratat, deși, dacă depănăm înapoi firul istoriei, se poate spune cu destulă certitudine că arabii au tradus lucrarea pe baza unui exemplar grecesc revizuit de **Teon din Alexandria** (circa 335-415), matematician și astronom grec, și directorul bibliotecii din Alexandria. Împreună cu fiica sa, ilustra matematiciană **Hypatia** (circa 370-415), a scris comentarii la diverse opere ale Antichității, printre care *Elementele*. În prezent, nu știm cu certitudine dacă versiunea tratatului ajunsă la noi conține adăugirile lui Teon sau ale Hypatiei, care nu erau prezente în original...

În acest punct, urmele se pierd, așa că dăm timpul înapoi cu încă șase sute de ani și ajungem la momentul când genialul Euclid privea cum pâlpâie flacăra din lampă.

Alexandria, anul 300 î.Hr., acasă la Euclid

Știm puține lucruri despre protagonistul nostru, și nici măcar nu suntem siguri că a trăit în realitate. Nu știm dacă a scris singur principala sa operă, *Elementele*, dacă a coordonat o echipă de scribi sau dacă nu cumva acest nume a fost ales de grupul de învățați implicați în scrierea celor treisprezece volume ce alcătuiesc opera. Ceea ce putem afirma cu certitudine este că această piesă fundamentală din istoria

Figura 1. Fragment de papirus cu *Elementele* găsit în urma săpăturilor de la Oxyrinus.



HYPATIA DIN ALEXANDRIA

Hypatia din Alexandria este una dintre puținele femei matematician ale Antichității, despre care s-au păstrat informații fiabile. Se știe că a aprofundat studiile și a adăugat comentarii la principalele lucrări de matematică, nu numai la *Elemente*, ci și la *Aritmetica* lui Diofant și *Secțiunile conice* ale lui Apollonius din Perga. A avut contribuții și în domeniul astronomiei, explorând și îmbunătățind posibilitățile astrolabilor. A apărat cu tenacitate știința și a murit ucisă cu cruzime de o gloată de creștini, cu siguranță la ordinul patriarhului Chiril al Alexandriei. Unele ipoteze susțin că o femeie aflată în tabăra științei și a cunoașterii era un personaj destul de incomod pentru religia care avea o mare putere în acea epocă, de aceea masele au fost instigate să o omoare. I s-a atribuit următoarea frază: „Apără-ți dreptul de a gândi, căci și a gândi greșit este mai bine decât a nu gândi deloc”.



Figura 2. Hypatia din Alexandria

științei a reprezentat o piatră unghiulară în existența ființei umane, o contribuție care a reușit să se răspândească în societatea umană timp de peste două mii de ani, așa încât și astăzi se mai scriu cărți care vorbesc despre *Elemente*.

Cel mai probabil, este vorba despre un autor unic. La o distanță de circa șase secole după epoca în care au fost scrise *Elementele*, **Proclus** (412-485), renumit filosof și istoric grec, relatează în lucrarea sa *Comentarii la prima carte a „Elementelor”* lui Euclid că protagonistul nostru și-a desfășurat activitatea în apropiere de Alexandria, și că s-a născut înaintea lui Arhimede și după discipolii lui Platon. Euclid a atins maturitatea intelectuală în jurul anului 330 î.Hr., anul în care au fost datate în mod convențional *Elementele*. Și Proclus menționează caracteristici și detalii ale lucrării, asemenea matematicienilor dinaintea sa care, într-un fel sau altul, și-au adus contribuția la compendiu.

Lucrarea lui Euclid nu este prima care își propune să concentreze întreaga cunoaștere deja existentă, și nici măcar cea dintâi cu titlul *Elemente*. Însă datorită unora dintre trăsăturile sale principale, lucrarea era atât de prețioasă încât a dăinuit în timp, iar în opinia reputatului istoric al științei, Carl B. Boyer, aceasta reprezintă cartea de referință cea mai influentă din istorie: sunt extrem de puține cărțile care au depășit cele aproximativ o mie de ediții ale *Elementelor*.

Probabil aspectul cel mai însemnat al *Elementelor* este caracterul lor didactic. Tratatul nu se mărginește la a preda o știință, ci merge mai în profunzime, ne învață cum să o studiem și să o elaborăm, oferind cititorului instrumentele prin care să continue singur procesul de edificare. Lucrarea nu cuprinde toate cunoștințele la care avea acces Euclide, iar pentru mulți experți, acesta este cel mai valoros aspect al *Elementelor*: alegerea ingenioasă a teoremelor și a problemelor prezentate; merită menționată și bogăția metodelor folosite.



Figura 3. Statuia lui Euclid, Muzeul de Istorie Naturală al Universității din Oxford.